Thermodynamique et mécanique des fluides – Chapitre 4

Expression différentielle des principes thermodynamiques – TD

Exercice 1 : Questions de cours

1. Énoncer la première identité thermodynamique pour un système fermé, puis définir la température thermodynamique et la pression thermodynamique.
2. Rappeler la définition de l'enthalpie, puis en déduire la seconde identité thermodynamique pour un système fermé.
3. Rappeler la définition de l'enthalpie libre, puis en déduire la troisième identité thermodynamique pour un système fermé.

Correction :

1. La première identité thermodynamique pour un système fermé s'écrit : $\mathrm{d}U = T\,\mathrm{d}S - P\,\mathrm{d}V$, avec :
- la température thermodynamique $T = \left.\dfrac{\partial U}{\partial S}\right|_V$;
- la pression thermodynamique $P = -\left.\dfrac{\partial U}{\partial V}\right|_S$.

2. L'enthalpie est définie telle que : $H = U + P\,V$, d'où on en déduit la seconde identité thermodynamique : $\mathrm{d}H = \mathrm{d}U + P\,\mathrm{d}V + V\,\mathrm{d}P = T\,\mathrm{d}S - P\,\mathrm{d}V + P\,\mathrm{d}V + V\,\mathrm{d}P = T\,\mathrm{d}S + V\,\mathrm{d}P$.
3. L'enthalpie libre est définie telle que : $G = H - T\,S$, d'où on en déduit la troisième identité thermodynamique : $\mathrm{d}G = \mathrm{d}H - T\,\mathrm{d}S - S\,\mathrm{d}T = T\,\mathrm{d}S + V\,\mathrm{d}P - T\,\mathrm{d}S - S\,\mathrm{d}T = -S\,\mathrm{d}T + V\,\mathrm{d}P$.

Exercice 2 : Capacité thermique massique de l'air

On assimile l'air à un gaz parfait diatomique de masse molaire $M = 29\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$.

1. Exprimer l'enthalpie massique h de l'air en fonction de la température T, de la constante des gaz parfaits R, et de la masse molaire M.
2. En déduire la valeur de la capacité thermique massique à pression constante c_P de l'air.
3. Rappeler l'expression massique de la seconde identité thermodynamique.
4. Montrer que la variation infinitésimale d'entropie massique $\mathrm{d}s$ de l'air peut s'exprimer en fonction des variations infinitésimales de température et de pression telle que :

$$\mathrm{d}s = c_\mathrm{P}\,\frac{\mathrm{d}T}{T} - \frac{R}{M}\,\frac{\mathrm{d}P}{P}.$$

5. Calculer la variation d'entropie massique de l'air pour une transformation isobare entre la température $T_1 = 20°\mathrm{C}$ et la température $T_2 = 50°\mathrm{C}$.

Correction :

1. L'enthalpie est définie telle que : $H = U + P\,V$, avec $U = \dfrac{5}{2}\,n\,R\,T$ et $P\,V = n\,R\,T$ pour un gaz parfait diatomique, soit : $H = \dfrac{7}{2}\,n\,R\,T$, d'où : $h = \dfrac{H}{m} = \dfrac{7}{2}\,\dfrac{n\,R\,T}{m} = \dfrac{7}{2}\,\dfrac{R\,T}{M}$.
2. La capacité thermique massique à pression constante est : $c_\mathrm{P} = \dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}T} = \dfrac{7}{2}\,\dfrac{R}{M} = 1{,}0.10^3\,\mathrm{J\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}$.
3. La seconde identité thermodynamique massique s'écrit : $\mathrm{d}h = T\,\mathrm{d}s + v\,\mathrm{d}P$.
4. En exprimant $\mathrm{d}h = c_\mathrm{P}\,\mathrm{d}T$ et $v = \dfrac{V}{m} = \dfrac{R\,T}{P\,M}$, la seconde identité donne : $c_\mathrm{P}\,\mathrm{d}T = T\,\mathrm{d}s + \dfrac{R\,T}{P\,M}\,\mathrm{d}P$, d'où : $\mathrm{d}s = c_\mathrm{P}\,\dfrac{\mathrm{d}T}{T} - \dfrac{R}{M}\,\dfrac{\mathrm{d}P}{P}$.

5. Pour une transformation isobare, on obtient en intégrant : $\Delta s = \displaystyle\int_{T_1}^{T_2} c_\mathrm{P}\,\frac{\mathrm{d}T}{T} = c_\mathrm{P}\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = 98\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{K}^{-1}\cdot\mathrm{kg}^{-1}$.

Exercice 3 : Résistance chauffante dans une enceinte

On considère une enceinte calorifugée fermée par un piston qui est libre de coulisser sans frottements afin de s'équilibrer avec la pression extérieure P_0. L'enceinte contient un gaz parfait de coefficient adiabatique γ, initialement à la température T_0 et qui occupe un volume V_0. Une résistance chauffante est également présente dans l'enceinte, elle est alimentée par un générateur de courant idéal qui délivre une intensité I constante. La valeur de la résistance chauffante dépend de la température T selon la loi :

$$r(T) = \frac{r_0\,T}{T_0}$$

avec r_0 une constante.

1. Déterminer l'évolution temporelle de la température du gaz $T(t)$ au cours du chauffage.

2. En déduire l'évolution temporelle du volume de l'enceinte $V(t)$ au cours du chauffage.

Correction :

1. Comme la transformation est adiabatique et isobare à la pression $P = P_0$, le premier principe de la thermodynamique donne : $\mathrm{d}H = \delta W_\text{élec}$, avec $\delta W_\text{élec} = r(T)\,I^2\,\mathrm{d}t = \dfrac{r_0\,T}{T_0}\,I^2\,\mathrm{d}t$ et $\mathrm{d}H = C_\mathrm{P}\,\mathrm{d}T = \dfrac{\gamma\,n_0\,R}{\gamma-1}\,\mathrm{d}T$ pour le gaz parfait de quantité $n_0 = \dfrac{P_0\,V_0}{R\,T_0}$. On obtient : $\dfrac{\gamma\,P_0\,V_0}{(\gamma-1)\,T_0}\,\mathrm{d}T = \dfrac{r_0\,T}{T_0}\,I^2\,\mathrm{d}t$, d'où l'équation différentielle vérifiée par la température : $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} - \dfrac{r_0\,I^2\,(\gamma-1)}{\gamma\,P_0\,V_0}\,T = 0$.

La solution est de la forme : $T(t) = A\,\exp\left(\dfrac{r_0\,I^2\,(\gamma-1)}{\gamma\,P_0\,V_0}\,t\right)$, et on détermine la constante A à l'aide de la condition initiale : $T(t=0) = T_0 = A$, d'où : $T(t) = T_0\,\exp\left(\dfrac{r_0\,I^2\,(\gamma-1)}{\gamma\,P_0\,V_0}\,t\right)$.

2. Avec la loi des gaz parfaits, on en déduit : $V(t) = \dfrac{n_0\,R\,T(t)}{P_0} = \dfrac{V_0\,T(t)}{T_0} = V_0\,\exp\left(\dfrac{r_0\,I^2\,(\gamma-1)}{\gamma\,P_0\,V_0}\,t\right)$.

Exercice 4 : Transformation polytropique infinitésimale d'un gaz parfait

On s'intéresse à un gaz parfait subissant de façon quasi-statique une transformation polytropique. Il s'agit d'une transformation intermédiaire entre une transformation adiabatique et une transformation isotherme, fréquemment utilisée dans l'industrie, dont la variation infinitésimale d'entropie massique s'exprime :

$$\mathrm{d}s = c_0\,\frac{\mathrm{d}T}{T}$$

avec T la température du gaz et c_0 une constante appelée capacité thermique massique vraie.

On note γ son coefficient adiabatique, M sa masse molaire, v son volume massique et R la constante des gaz parfaits.

1. À l'aide de la première identité thermodynamique, montrer qu'une transformation polytropique d'un gaz parfait vérifie la relation :

$$\left[c_0 - \frac{R}{M\,(\gamma-1)}\right]\frac{\mathrm{d}T}{T} = \frac{R}{M}\,\frac{\mathrm{d}v}{v}.$$

2. En déduire que le produit $P\,v^k$ est constant au cours de la transformation, avec k une constante que l'on exprimera en fonction de c_0, γ, M et R.

3. Montrer que le travail massique reçu par le gaz au cours de la transformation peut s'exprimer :

$$\delta w = \frac{R}{M\,(k-1)}\,\mathrm{d}T.$$

4. En déduire que le transfert thermique massique reçu par le gaz au cours de la transformation peut s'exprimer :

$$\delta q = \frac{R}{M}\left(\frac{1}{\gamma-1}-\frac{1}{k-1}\right)\mathrm{d}T.$$

5. Déterminer les valeurs de k qui permettent d'obtenir une transformation isobare, une transformation isochore, une transformation adiabatique, et une transformation isotherme.

Correction :

1. La première identité thermodynamique massique donne : $\mathrm{d}u = T\,\mathrm{d}s - P\,\mathrm{d}v$, avec $P = \dfrac{n\,R\,T}{V} = \dfrac{m\,R\,T}{M\,V} = \dfrac{R\,T}{M\,v}$ et $\mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}U}{m} = \dfrac{C_\mathrm{V}\,\mathrm{d}T}{m} = \dfrac{\frac{n\,R}{\gamma-1}\,\mathrm{d}T}{m} = \dfrac{R}{M\,(\gamma-1)}\,\mathrm{d}T$ pour un gaz parfait, et $\mathrm{d}s = c_0\,\dfrac{\mathrm{d}T}{T}$ pour une transformation polytropique. On obtient donc : $\dfrac{R}{M\,(\gamma-1)}\,\mathrm{d}T = c_0\,\mathrm{d}T - \dfrac{R\,T}{M\,v}\,\mathrm{d}v$, d'où : $\left[c_0 - \dfrac{R}{M\,(\gamma-1)}\right]\dfrac{\mathrm{d}T}{T} = \dfrac{R}{M}\,\dfrac{\mathrm{d}v}{v}$.

2. En intégrant la relation précédente, on obtient : $\left[c_0 - \dfrac{R}{M\,(\gamma-1)}\right]\ln T = \dfrac{R}{M}\ln v + \text{cste}$, avec $T = \dfrac{P\,M\,v}{R}$, soit : $\left[c_0 - \dfrac{R}{M\,(\gamma-1)}\right]\ln(P\,v) = \dfrac{R}{M}\ln v + \text{cste}'$, d'où : $\left[c_0 - \dfrac{R}{M\,(\gamma-1)}\right]\ln P + \left[c_0 - \dfrac{R}{M\,(\gamma-1)} - \dfrac{R}{M}\right]\ln v = \text{cste}'$, soit finalement : $\left[c_0 - \dfrac{R}{M\,(\gamma-1)}\right]\ln P + \left[c_0 - \dfrac{R\,\gamma}{M\,(\gamma-1)}\right]\ln v = \text{cste}'$.

Avec les propriétés du logarithme, on obtient : $P^{\left[c_0 - \frac{R}{M(\gamma-1)}\right]}\,v^{\left[c_0 - \frac{R\,\gamma}{M(\gamma-1)}\right]} = \text{cste}''$. Le produit $P\,v^k$ est donc constant en posant $k = \dfrac{c_0 - \frac{R\,\gamma}{M(\gamma-1)}}{c_0 - \frac{R}{M(\gamma-1)}}$.

3. Pour cette transformation quasi-statique, le travail massique reçu s'exprime : $\delta w = -P\,\mathrm{d}v = -\dfrac{R\,T}{M\,v}\,\mathrm{d}v$, et on obtient en utilisant la relation différentielle précédente : $\delta w = -\left[c_0 - \dfrac{R}{M\,(\gamma-1)}\right]\mathrm{d}T$.

Comme $k - 1 = \dfrac{c_0 - \frac{R\,\gamma}{M(\gamma-1)}}{c_0 - \frac{R}{M(\gamma-1)}} - 1 = \dfrac{-\frac{R}{M}}{c_0 - \frac{R}{M(\gamma-1)}}$, on peut alors exprimer : $\delta w = \dfrac{R}{M\,(k-1)}\,\mathrm{d}T$.

4. L'application du premier principe de la thermodynamique sous forme massique à la transformation donne : $\mathrm{d}u = \delta w + \delta q = \dfrac{R}{M\,(k-1)}\,\mathrm{d}T + \delta q$, avec $\mathrm{d}u = \dfrac{R}{M\,(\gamma-1)}\,\mathrm{d}T$, d'où : $\delta q = \dfrac{R}{M}\left(\dfrac{1}{\gamma-1}-\dfrac{1}{k-1}\right)\mathrm{d}T$.

5. Une transformation isobare correspond à $P = \text{cste}$, d'où : $v^k = \text{cste}$, ce qui n'est vérifié que si $k = 0$.
Une transformation isochore correspond à $v = \text{cste}$, d'où : $\delta w = 0$, ce qui n'est vérifié que si $k \to \infty$.
Une transformation adiabatique correspond à $\delta q = 0$, ce qui n'est vérifié que si $k = \gamma$.
Une transformation isotherme correspond à $T = \text{cste}$, d'où : $P\,v = \text{cste}$ pour un gaz parfait, ce qui n'est vérifié que si $k = 1$.